المادة: الرياضيات

درس رقم/5

الأستاذ: نجيب عثماني

ملخص لدرس الدوال الأصلية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا شعبة العلوم التجريبية (مسلك علوم الحياة و الأرض و العلوم الفيزيائية و العلوم الزراعية)

I. الدوال الأصلية لدالة:

دالة أصلية لدالة على مجال:

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

نسمي دالة أصلية للدالة f على I , كل دالة F قابلة للاشتقاق على I و, مشتقتها f هي, أي $(\forall x\in I);F'(x)=f(x)$

خاصية 1:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ,و F دالة أصلية للدالة على I,

الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto F(x)+k$, حيث k عدد حقيقي.

خاصية 2:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و x_0 عنصرا من I و y_0 عددا حقيقيا معلوما.

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية على I فانه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I بحيث: $G(x_0)=y_0$

البرهان:

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I ,فان جميع الدوال الأصلية للدالة f معرفة على I بما يلي: $G(x)=F(x)+k$

حيث k عدد حقيقي.الشرط $G(x_0)=y_0$ يعني $F(x_0)+k=y_0$ أي $k=y_0-F(x_0)$

إذن توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I معرفة بما يلي: $G(x)=F(x)+y_0-F(x_0)$

خاصية 3:

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I .

خاصية 4:

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجال I ,و k عددا حقيقيا.

إذا كانت F و G دالتين أصليتين,على التوالي للدالتين f و g على I , فان:

- الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .
- الدالة kF دالة أصلية للدالة kf على.

II. جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية:

انطلاقا من القراءة العكسية لجدول مشتقات الدوال الاعتيادية نحصل على الجدول التالي:

الدالة f معرفة على مجال I	الدوال الأصلية للدالة f على المجال I	المجال I
$x\mapsto k;k\in\mathbb{R}$	$x\mapsto kx+c;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x$	$x\mapsto \frac{x^2}{2}+c;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto x^n;n\in\mathbb{N}^*$	$x\mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c;c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto \frac{1}{x^2}$	$x\mapsto -\frac{1}{x}+c;c\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$x\mapsto \frac{1}{x^n};n\in(\mathbb{N}^*-\{1\})$	$x\mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}+c;c\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}+c; c\in \mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto x^r; r\in \left(\mathbb{Q}^* - \{-1\}\right)$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c; c\in \mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)+c; c\in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)+c; c\in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)+c; c\in \mathbb{R}$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[; k\in \mathbb{Z}$

III. الدوال الأصلية و العمليات:

انطلاقا من القراءة العكسية للعمليات على الدوال المشتقة حصلنا على الجدول أسفله:

الدالة f معرفة على مجال I	الدوال الأصلية للدالة f على المجال I	ملحوظات
$u'u^n; n\in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	u لا تنعدم على I
$u'u^r; r\in \left(\mathbb{Q}^* - \{-1\}\right)$	$u \quad \frac{1}{r+1}u^{r+1}$	u موجبة قطعا على I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u موجبة قطعا على I
$u'+v'$	$u+v$	
$uv'+vu'$	uv	
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	v موجبة قطعا على I
$x \mapsto u'(ax+b); a\in \mathbb{R}^*; b\in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}u(ax+b)$	